Neutrondiffusion

Jacob Nielsen

Diffusion af blæk i vand.

Neutronernes bevægelse igennem et materiale er et grundliggende problem i forbindelse med fission. Problemet er derfor også behandlet i Robert Serbers bog "The Los Alamos Primer[1]", hvor udfordringerne, som de så ud ved Manhattan Projektets start, præsenteres. På dette tidspunkt vidste man ikke, hvor stor den kritiske masse af Uran og Plutonium var, men Serbers overslagsberegning gav en værdi i størrelsesordenen 100 kg. Neutrondiffusion var også vigtig for Enrico Fermis arbejde med konstruktion af den første kernereaktor.

Det fysiske problem i denne forbindelse er at opstille en realistisk model og dernæst at bestemme de indgående parametre. Modellen, der blev anvendt, er en diffusionsligning, og blandt de indgående parametre er nogle reaktionssandsynligheder for neutroners indfangning i - og fission af uran og plutonium kerner. Det matematiske problem er at løse diffusionsligningerne. Hovedvægten i denne note ligger på løsning af diffusionsligningen for en kugleformet og en terningformet masse.

Diffusionsligningen, der opstilles af Serber, er vist som ligning 1.1 nedenfor. N er neutronkoncentrationen, der er en funktion at tiden og de tre rumkoordinater. Trekanten med hat over er den såkaldte Laplaceoperator. D er diffusionskonstanten. υ er antallet af neutroner, der frigives ved hver kernespaltning. τ er middelværdien af tiden, der går fra en neutron er dannet til den indgår i en fissionsproces. Ligningen har samme form som en varmeledningsligning[2] for et materiale med en indbygget energikilde. Det skyldes at varmeledning er proportional med den rumafledede af temperaturen (temperaturgradienten) og diffusionsstrømmen er proportional med den rumafledede af koncentrationen (koncentrationsgradienten). Kilden er i vores tilfælde neutronerne, der skabes ved fission inde i materialet.

1.1 $$\frac{\partial N}{\partial t} = D \cdot \hat{\Delta} N + \frac{\nu - 1}{\tau} \cdot N$$

1.2 $$N(t,x,y,z) = N_{rum}(x,y,z) \cdot e^{\nu' \cdot t/\tau} \quad \wedge \quad \nu' = (\nu - 1) - \frac{\pi^2 \cdot D \cdot \tau}{R^2}$$

1.3 $$\hat{\Delta} N_{rum} + \frac{\nu' - \nu - 1}{D \cdot \tau} \cdot N_{rum} = 0$$

Ligning 1.2 viser, hvordan Serber søger løsninger af ligningen, der kan skrives som et produkt af en funktion, der kun afhænger af tiden og en funktion, der kun afhænger af de rumlige koordinater. Denne metode kaldes "separation af de variable".

Ligning 1.3 er den rumlige ligning, som vi skal arbejde videre med.

[1] Robert Serber, "The Los Alamos Primer", University of California Press 1992.

[2] Pitts & Sissom, "Heat Transfer", McGraw-Hill 1977, p.14-15 og 28-29.

Laplaceoperatoren i cartesiske og sfæriske koordinater

Cartesiske koordinater:

l1 $$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

l2 $$\Delta\Phi + k^2\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

l3 $$\Phi(t,x,y,z) = T(t)\cdot X(x)\cdot Y(y)\cdot Z(z)$$

l4 $$\Delta T(t)\cdot \Delta(X\cdot Y\cdot Z) + k^2\cdot T\cdot X\cdot Y\cdot Z = \frac{\partial T}{\partial t}\cdot X\cdot Y\cdot Z$$

l5 $$\frac{\Delta(X\cdot Y\cdot Z)}{X\cdot Y\cdot Z} + k^2 = \frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial t}$$

l6 $$\Delta(X\cdot Y\cdot Z) + k^2\cdot X\cdot Y\cdot Z = C \quad \wedge \quad \frac{\partial T}{\partial t} = C\cdot T \quad \wedge \quad T\cdot X\cdot Y\cdot Z \neq 0$$

l7 $$X(x)\cdot Y(y)\cdot Z(z) = \sin(k_1 x)\sin(k_2 y)\sin(k_3 z) + \frac{C}{k^2} \quad \wedge \quad k_1{}^2 + k_2{}^2 + k_3{}^2 = k^2 \quad \wedge \quad C \neq 0$$

l8 $$T(t) = A\cdot e^{C\cdot t}$$

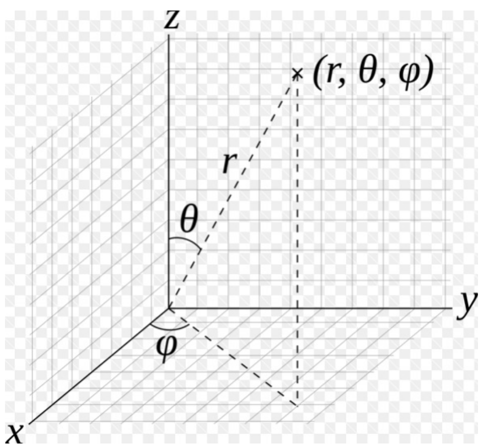
I ligning l1 er Laplaceoperatoren skrevet ud. De bløde d´er markerer, at der er tale om partiel differentiation. Når man differentierer partielt med hensyn til en variabel, så betragtes alle andre variable som konstanter. Laplaceoperatoren differentierer således to gange med hensyn til hver variabel og lægger resultaterne sammen.

Ligning l2 er en kompakt måde at skrive diffusionsligningen med kilde på.

Ligning l3 udtrykker, at vi søger løsninger, der kan skrives som et produkt af funktioner, der kan afhænger af en variabel. Ligning l5 viser, hvordan vi herved får en ligning, hvor venstre side kun afhænger af de rumlige variable, og højre side kun afhænger af tiden. Dette kan kun være opfyldt, hvis begge sider er lig med en konstant C. Ligningerne l7 og l8 angiver løsningerne til differentialligningene. Metoden, der er anvendt her kaldes separation af de variable. Det anbefales læseren at kontrollere løsningerne ved indsættelse i differentialligningen.

Konstanterne A og C findes ud fra de fysiske parametre og ud fra de såkaldte grænsebetingelser. Grænsebetingelser kan være funktiones værdi på grænsen af det område, som løsningen skal gælde i. Det skal nævnes, at l7 ikke er en fuldstændig løsning. En tilsvarende funktion sammensat af cosinusfunktioner er også løsning.

Laplaceoperatoren i sfæriske koordinater



De sfæriske koordinater har følgende sammenhæng med de cartesiske koordinater:
*x = r*sin(θ)*cos(Φ)*
*y = r*sin(θ)*sin(Φ)*
*x = r*cos(θ)*
r er længden af retningsvektoren for punktet (x,y,z), θ er vinklen mellem retningsvektoren og zaksen og Φ er vinklen mellem retningsvektorens projition på xy-planen og x-aksen.

I sfæriske koordinater er Laplaceoperatoren givet ved:

l9 $$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

l10 $$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) = \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}$$

l11 $$\Delta\Phi + k^2\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

l12 $$\Phi(t,r) = T(t)\cdot R(r)$$

l13 $$\Delta T\cdot\Delta(R) + k^2\cdot T\cdot R = \frac{\partial T}{\partial t}\cdot R$$

l14 $$\frac{\Delta(R)}{R} + k^2 = \frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial t}$$

l15 $$\Delta(R) = R\left(C - k^2\right) \quad\wedge\quad \frac{\partial T}{\partial t} = C\cdot T \quad\wedge\quad T\cdot R \neq 0$$

l16 $$\frac{2}{r}\frac{\partial R}{\partial r} + \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} = R\left(C - k^2\right)$$

l16 $$\mathrm{R}(r) = A\frac{1}{r}\sin(k_1 r) + \frac{1}{r}B\cos(k_1 r) \wedge\ k_1{}^2 = C - k^2 \quad\wedge\quad C > 0$$

l17 $$T(t) = e^{C\cdot t}$$

Ligning l10 er Laplace operatoren ved sfærisk symmetri, hvor afhængigheden af θ og φ forsvinder. Indholdet i de følgende linjer svarer til det, der er beskrevet på forgående side ved cartesiske koordinater.